Théorème :

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et injective alors f est strictement monotone.

Démonstration :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective

Si I est réduit à un point : ok

Sinon, I possède au moins deux points que l'on notera a , b de sorte que $a < b$.

Puisque f est injective $f(a) \neq f(b)$.

Premier cas : Supposons $f(a) < f(b)$ et montrons que f est strictement croissante.

Soit $x, y \in I$ tels que $x < y$.

Posons $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par : $\varphi(t) = f\big((1-t)b + ty\big) - f\big((1-t)a + tx\big)$.

Par construction $\varphi(0) = f(b) - f(a) > 0$ et $\varphi(1) = f(y) - f(x)$.

Par opérations sur les fonctions continues φ est continue.

Par l'absurde, supposons $f(y) \leq f(x)$.

On a alors $\varphi(1) \leq 0$.

En appliquant le TVI entre 0 et 1 : $\exists t \in]0,1]$ tel que $\varphi(t) = 0$.

Posons alors $u = (1-t)a + tx$ et $v = (1-t)b + ty$.

$\varphi(t) = 0$ donne $f(u) = f(v)$ puis $u = v$ car f est supposée injective.

Or, $a \leq b$ et $(1-t) \geq 0$ donc $(1-t)a \leq (1-t)b$,

de plus $x < y$ et $t > 0$ donc $tx < ty$

et par suite $u < v$. Absurde !

Par suite $f(x) < f(y)$ et nous avons établi : $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Ainsi f est strictement croissante. Joli ?

Deuxième cas : Supposons $f(b) < f(a)$.

On applique l'étude précédente à $g = -f$.

On obtient que g est strictement croissante et on conclut que f est strictement décroissante.